

Fortschreibung von Zeitreihen der regionalen VGR unter Berücksichtigung der Aggregationsrestriktion – eine alternative Methode

Vortrag im Rahmen des 7. Berliner VGR-Kolloquiums (12.-13.06.2014)

Dr. Udo Vullhorst

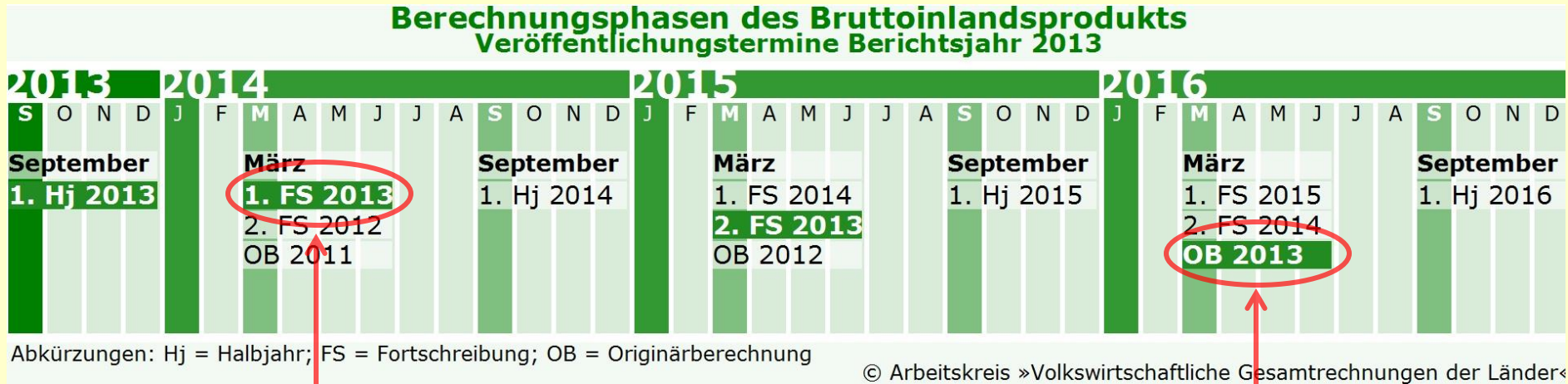
Referat „Wirtschaftswissenschaftliche Analysen,
Volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen“
Statistisches Landesamt Baden-Württemberg



Baden-Württemberg

STATISTISCHES LANDESAMT

Von der ersten Fortschreibung zur Originärberechnung – ein weiter Weg ...



... für die Konjunkturberichterstattung besonders relevant!

... für die Konjunkturberichterstattung von eher historischem Interesse!

Regionale Volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen: „Im Spannungsfeld zwischen Aktualität und Genauigkeit“

- Konjunkturberichterstattung: stärkere Gewichtung der Aktualität
- Fortschreibungen sind notwendigerweise indikatorgestützt
- Problem: je näher am Berichtsjahr, desto unvollständiger die Berechnungsgrundlage

☞ **Wie kann man den Informationsgehalt der Indikatoren bestmöglich nutzen, um die Genauigkeit der Fortschreibungen zu erhöhen?**

Titel eines Beitrages von Frank Thalheimer im Statistischen Monatsheft Baden-Württemberg 10/2008.



Fortschreibung erfolgt vorzugsweise mit landesspezifischen Indikatoren, ansonsten mit Bundeswerten – Implikationen

Wirtschaftszweig	Indikator	Fortschreibung	Ländersumme = Deutschlandwert?
...
28 Maschinenbau	Umsatz Land	$\frac{\tilde{Y}_{t+1}^{L28}}{Y_t^{L28}} = \frac{U_{t+1}^{L28}}{U_t^{L28}}$	nein
...
77 Vermietung von beweglichen Sachen	BWS Bund	$\frac{Y_{t+1}^{L77}}{Y_t^{L77}} = \frac{Y_{t+1}^{D77}}{Y_t^{D77}}$	ja
...

Welche Annahmen liegen diesem Verfahren zugrunde?
Was sind die Implikationen?

„Koordination auf den Bundeseckwert“:
Wie wird die Aggregationsrestriktion erfüllt?

Welche Annahmen liegen dem amtlichen Fortschreibungsverfahren zugrunde?

definitivischer Zusammenhang:

$$\begin{array}{rcccl} Y_t & = & PW_t & - & VL_t \\ \text{Bruttowertschöpfung} & & \text{Produktionswert} & & \text{Vorleistungen} \end{array}$$

vereinfachter definitivischer Zusammenhang:

$$\begin{array}{rcccl} Y_t & = & U_t & - & VL_t \\ \text{Bruttowertschöpfung} & & \text{Umsatz} & & \text{Vorleistungen} \end{array}$$

ausgedrückt in Veränderungsraten:

$$\frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t} = \frac{U_{t+1} - U_t}{U_t - VL_t} - \frac{VL_{t+1} - VL_t}{U_t - VL_t}$$

mit konstanter Vorleistungsquote

$Q \equiv VL_t / U_t$ folgt:

$$\frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t} = \frac{U_{t+1} - U_t}{U_t}$$



... das amtliche Fortschreibungsverfahren!

Ein alternatives Fortschreibungsverfahren – Herleitung

- Ausgangspunkt: vereinfachte Definitionsgleichung für die BWS:

$$Y_t = U_t - VL_t \left(\underbrace{VL_t^{aut}}_{+}; \underbrace{U_t}_{+} \right)$$

- totales Differenzieren ergibt:

$$dY = dU - \left(\underbrace{\frac{\partial VL}{\partial VL^{aut}}}_{=1} dVL^{aut} + \frac{\partial VL}{\partial U} dU \right)$$

- durch geeignete Umformungen erhält man:

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dU}{U} \frac{U}{Y} - \frac{dU}{U} \frac{U}{Y} \frac{\partial VL}{\partial U} - \frac{dVL^{aut}}{VL^{aut}} \frac{VL^{aut}}{Y}$$
$$\Leftrightarrow y \approx \frac{dY}{Y} = -\frac{VL^{aut}}{Y} vl^{aut} + \left[\frac{U}{Y} \left(1 - \frac{\partial VL}{\partial U} \right) \right] u$$

- letztlich zu schätzendes Modell:

$$y_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 u_t + \hat{\varepsilon}_t$$

Ein alternatives Fortschreibungsverfahren – Eigenschaften (I)

$$y = \underbrace{-\frac{VL^{aut}}{Y} vl^{aut}}_{\hat{\beta}_0} + \underbrace{\left[\frac{U}{Y} \left(1 - \frac{\partial VL}{\partial U} \right) \right]}_{\hat{\beta}_1} u + \hat{\varepsilon}$$

- Vorzeichen und Größenordnung von $\hat{\beta}_1$?

Hängt ab von der „Vorleistungselastizität des Umsatzes“!

- 1. Fall: $\hat{\beta}_1 = 1$

$$\left[\frac{U}{Y} \left(1 - \frac{\partial VL}{\partial U} \right) \right] = 1 \Leftrightarrow \frac{\partial VL}{\partial U} = 1 - \frac{Y}{U} = \frac{U - Y}{U} = \frac{VL}{U} = Q \Leftrightarrow \frac{\partial VL}{\partial U} \frac{U}{VL} = \frac{VL}{U} \frac{U}{VL} = 1$$

... d.h., wenn die marginale Veränderung der Vorleistungen mit der (konstanten) Vorleistungsquote übereinstimmt.

Das ist genau dann der Fall, wenn eine *lineare* Funktion der Vorleistungen in Abhängigkeit von den Umsätzen durch den Ursprung geht.

$\hat{\beta}_1 = 1$ erfordert damit $\hat{\beta}_0 = 0$.  ... das aml. Fortschreibungsverfahren!

Ein alternatives Fortschreibungsverfahren – Eigenschaften (II)

$$y = \underbrace{-\frac{VL^{aut}}{Y}}_{\hat{\beta}_0} vl^{aut} + \underbrace{\left[\frac{U}{Y} \left(1 - \frac{\partial VL}{\partial U} \right) \right]}_{\hat{\beta}_1} u + \hat{\varepsilon}$$

- 2. Fall: $\hat{\beta}_1 < 1$

$$\left[\frac{U}{Y} \left(1 - \frac{\partial VL}{\partial U} \right) \right] < 1 \Leftrightarrow \frac{\partial VL}{\partial U} > 1 - \frac{Y}{U} = \frac{U - Y}{U} = \frac{VL}{U} = Q \Leftrightarrow \frac{\partial VL}{\partial U} \frac{U}{VL} > \frac{VL}{U} \frac{U}{VL} = 1$$

- in Worten: Vorleistungseinsatz steigt mit höherer Rate als der Umsatz. Eine Erhöhung des Umsatzes erfordert einen überproportionalen Vorleistungseinsatz.
- Modell lässt negatives Vorzeichen für $\hat{\beta}_0$ erwarten

Zusammenhang von Vorleistungsquote und Produktionswert

- Definition:
$$Q \equiv \frac{VL}{PW}$$

- totales Differenzieren ergibt:

$$dQ = \frac{1}{PW} dVL - \frac{VL}{PW^2} dPW \Leftrightarrow \frac{dQ}{dPW} = \frac{VL}{PW^2} \left[\left(\frac{dVL}{dPW} \frac{PW}{VL} \right) - 1 \right]$$

- amtl. Fortschreibungsverfahren setzt voraus:

$$\left(\frac{dVL}{dPW} \frac{PW}{VL} \right) = 1 \Rightarrow \frac{dQ}{dPW} = 0$$

- bei Elastizität > 1 muss zu beobachten sein:

$$\left(\frac{dVL}{dPW} \frac{PW}{VL} \right) > 1 \Rightarrow \frac{dQ}{dPW} > 1$$

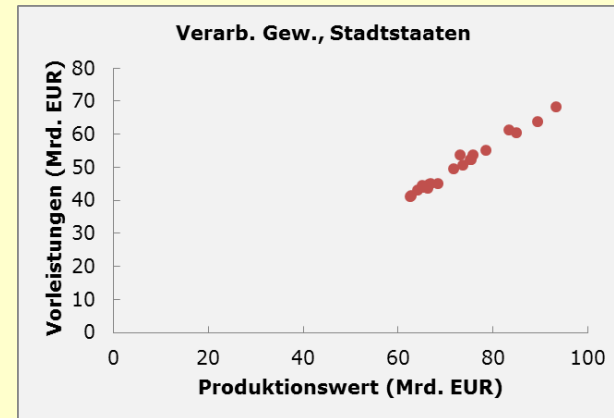
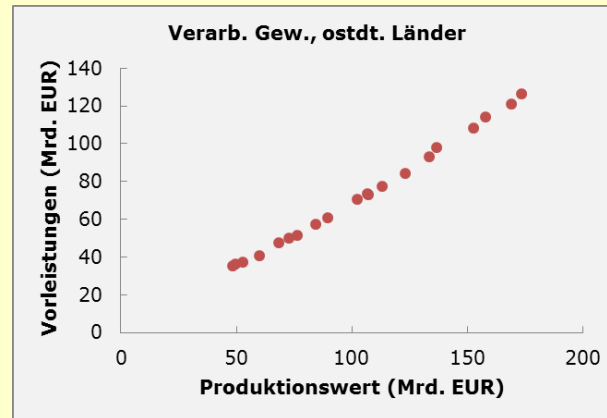
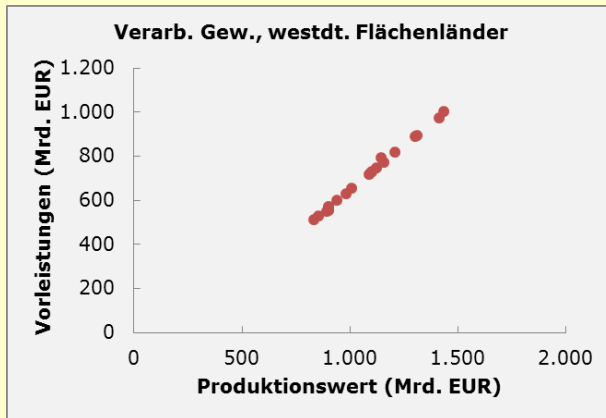
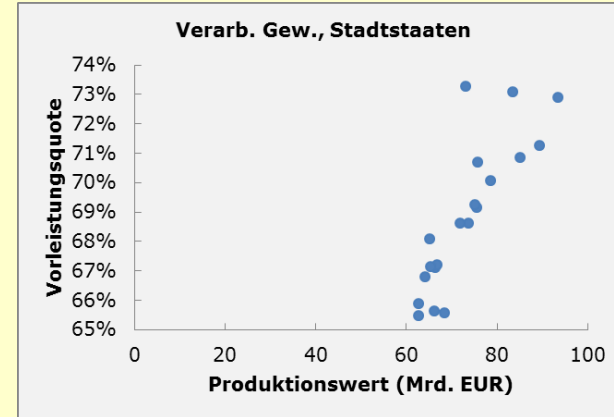
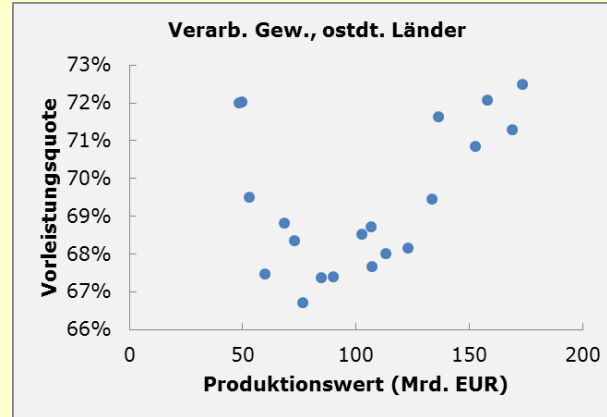
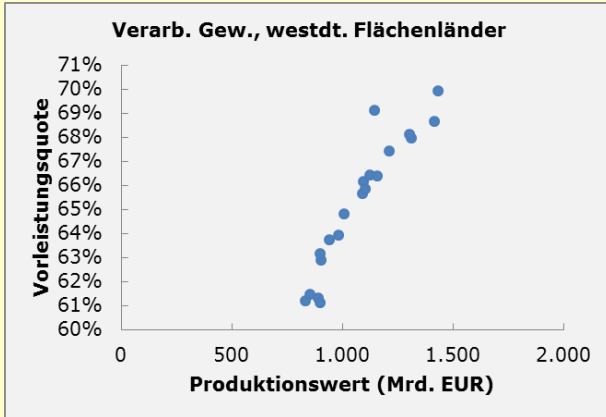
Vorleistungen – empirische Evidenz

(Vorleistungen und Produktionswert im Verarbeitenden Gewerbe nach Ländergruppen 1991–2010)

westdeutsche Flächenländer:

ostdeutsche Länder:

Stadtstaaten:



Variable Vorleistungsquoten – kleine Ursache, großer Hebel!

- Szenario „konstante Vorleistungsquote“ (fiktiv)

Jahr	Produktionswert (PW)		Vorleistungsquote (Q)	Vorleistungen (VL)	BWS=PW-VL	
	Mill. EUR	Veränd.			Mill. EUR	Mill. EUR
1895	96.477	-	65,0%	62.710	33.767	-
1896	98.696	2,3%	65,0%	64.152	34.544	2,3%

konstante Vorleistungsquote ...

... Veränderungsrate PW gleich Veränderungsrate BWS!

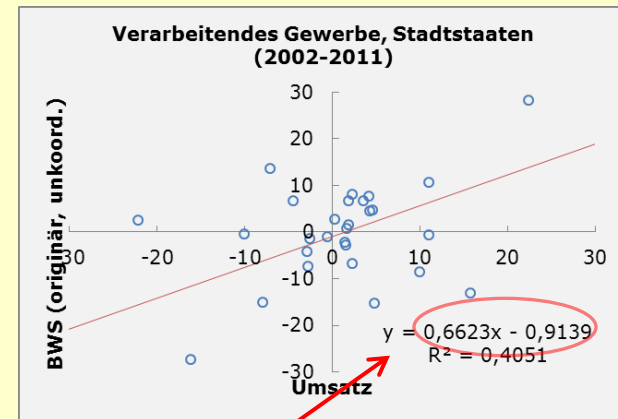
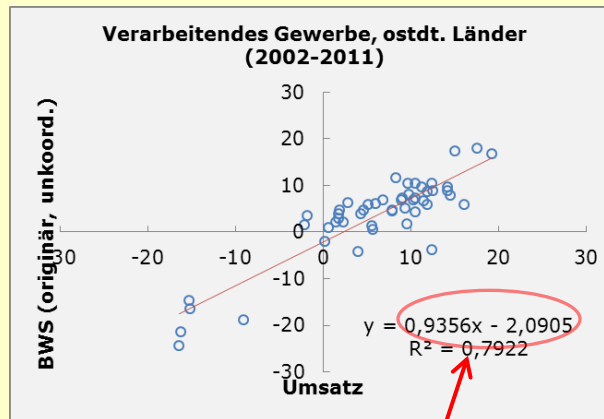
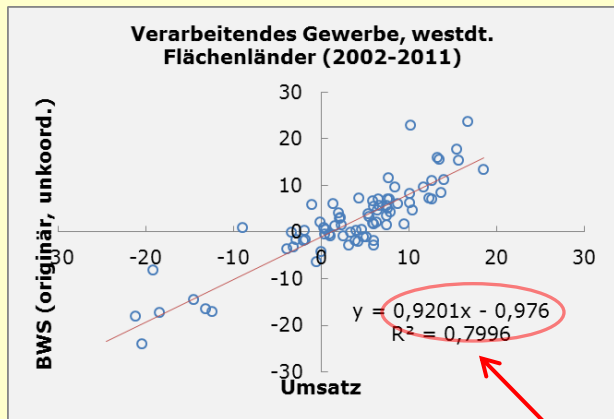
- Szenario „steigende Vorleistungsquote“ (fiktiv)

Jahr	Produktionswert (PW)		Vorleistungsquote (Q)	Vorleistungen (VL)	BWS=PW-VL	
	Mill. EUR	Veränd.			Mill. EUR	Mill. EUR
1895	96.477	-	65,0%	62.710	33.767	-
1896	98.696	2,3%	65,3%	64.448	34.248	1,4%

Vorleistungsquote steigt leicht ...

... Veränderungsrate BWS deutlich geringer als Veränderungsrate PW!

Das alternative Fortschreibungsverfahren – Schätzergebnisse (I)



empirisch: $\beta_0 < 0$ und $\beta_1 < 1$;

Vorzeichen und Größenordnung der Parameter entsprechen den modelltheoretisch begründeten Erwartungen!

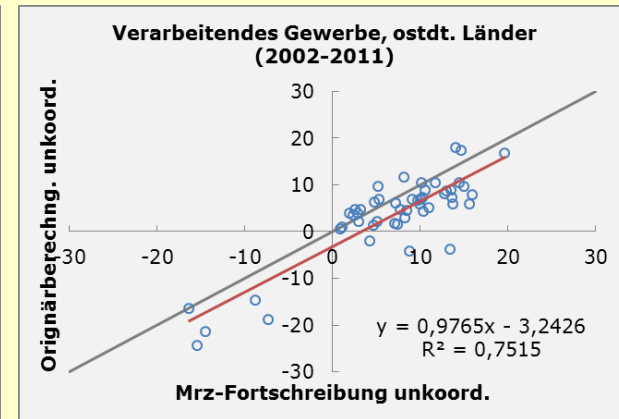
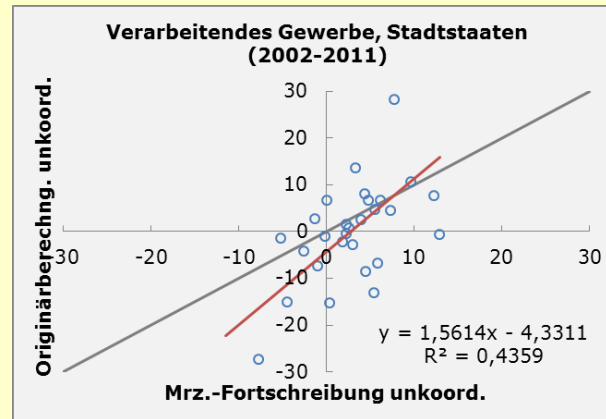
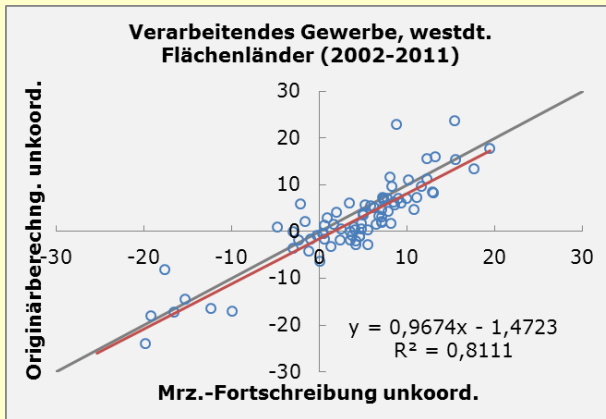
Das alternative Fortschreibungsverfahren – Schätzergebnisse (II)

		westdt. Flächenländer	Stadtstaaten	ostdt. Länder
$\hat{\beta}_0$	Wert	-0,9760	-0,9139	-2,0905
	se	0,4893	1,8661	0,7109
	t-Wert [†]	-1,9946	-0,4897	-2,9408
	Prob.	0,0496	0,6282	0,0050
	95%-Konf.int.	± 0,9787	± 3,8219	± 1,4366
$\hat{\beta}_1$	Wert	0,9201	0,6623	0,9356
	se	0,0522	0,1517	0,0692
	t-Wert [‡]	-1,5324	-2,2267	-0,9312
	Prob.	0,1295	0,0342	0,3564
	95%-Konf.int.	± 0,1043	± 0,3106	± 0,1398
R^2		0,7996	0,4051	0,7922
$\hat{\sigma}^2$		17,0010	103,4750	16,9102

[†]H₀: $\beta_0=0$

[‡]H₀: $\beta_1=1$

Annahme konstanter Vorleistungsquoten – Fortschreibung überschätzt Originärberechnung!



Zwischenfazit

- Vorleistungsquoten variieren in der Zeit und mit dem Produktionswert
- variable Vorleistungsquoten sind für die BIP-Berechnung relevant
- variable Vorleistungsquoten sollten in einem alternativen Modell berücksichtigt werden
- das amtl. Fortschreibungsverfahren folgt dem Modell

$$\left(\frac{\tilde{Y}_{t+1} - Y_t}{Y_t} \right) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \left(\frac{U_{t+1} - U_t}{U_t} \right) + \hat{\varepsilon}_t$$

mit den Parametern $\hat{\beta}_0 = 0$ und $\hat{\beta}_1 = 1$

☞ Die Modellparameter können (sollten?) geschätzt statt postuliert werden!

Das Ganze und die Summe der Teile – regionale VGR und Aggregationsrestriktion

„Die Summe der regionalen Werte stimmt selten exakt mit dem nationalen Gesamtwert überein, so dass die regionalen Werte in der Regel angepasst werden müssen. (...)

Die Abweichungen werden auf die Regionen in der Regel im Verhältnis zu den regionalen Werten aufgeteilt. (...) Liegt z.B. der nationale Gesamtwert um 5 % über der Summe der regionalen Werte, werden alle regionalen Werte um 5 % angehoben. Dieser pragmatische Ansatz ist (...) nicht immer geeignet. Andere Lösungen sollten daher immer erwogen werden.“ #

- # Eurostat (Hg., 1995); Methodik der regionalen Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen: Bruttowertschöpfung und Bruttoanlageinvestitionen nach Wirtschaftsbereichen, S. 16 (Hervorhebung UV).



„Koordinierung auf den Bundeseckwert“ – die amtliche Methode

Landeswert (koord.) \rightarrow $\frac{Y_t^{BW}}{\tilde{Y}_t^{BW}} - 1 = \frac{Y_t^D}{\tilde{Y}_t^D} - 1$ \leftarrow Bundeseckwert

Landeswert (unkoord.) \rightarrow \tilde{Y}_t^{BW} \leftarrow Ländersumme (unkoord.)

$$\Leftrightarrow Y_t^{BW} = \tilde{Y}_t^{BW} + \frac{\tilde{Y}_t^{BW}}{\tilde{Y}_t^D} \cdot (Y_t^D - \tilde{Y}_t^D)$$

Wertschöpfungsanteil des Landes
an der Ländersumme (Wirtschaftszweig)

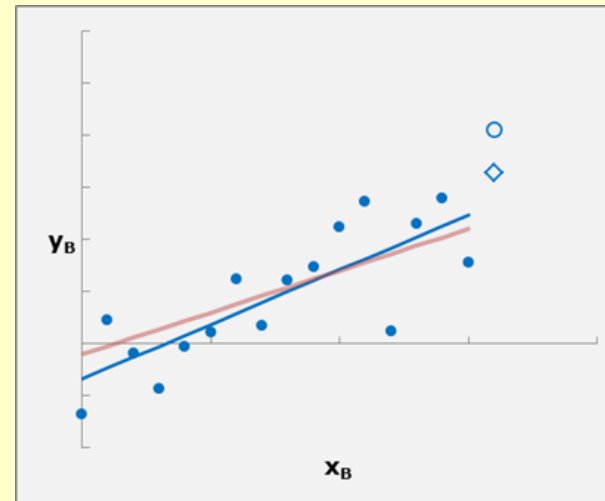
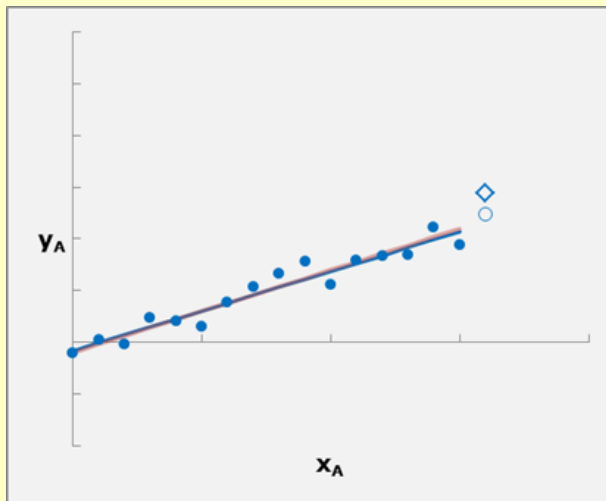
aufzuteilender
„Koordinierungs-
betrag“

in Veränderungsdaten:

$$\Leftrightarrow y_t^{BW} = \tilde{y}_t^{BW} + (y_t^D - \tilde{y}_t^D)$$

Ein alternatives Koordinierungsverfahren – die Grundidee

Zwei „Länder“, gleicher wahrer Zusammenhang von Indikator- und Zielgröße, unterschiedliche Streuung der Störgrößen



- ◇ Koordinierung mit BWS-Anteilen (amtl. Methode)
- Koordinierung unter Berücksichtigung der Varianz

Ein alternatives Koordinierungsverfahren – Vorbemerkung zur Aggregationsrestriktion

$$\hat{\varepsilon}_{t+1}^{ges} = \frac{Y_t^A}{Y_t^{ges}} \hat{\varepsilon}_{t+1}^A + \frac{Y_t^B}{Y_t^{ges}} \hat{\varepsilon}_{t+1}^B$$

„Koordinierungsbetrag“ ...
...gesamt ...Land A ...Land B

- ϕ Anteil am Koordinierungsbetrag, den Land A zu tragen hat
 $(1-\phi)$ Anteil am Koordinierungsbetrag, den Land B zu tragen hat

$$\frac{Y_t^A}{Y_t^{ges}} \hat{\varepsilon}_{t+1}^A = \phi \hat{\varepsilon}_{t+1}^{ges} \Leftrightarrow \hat{\varepsilon}_{t+1}^A = \phi \frac{Y_t^{ges}}{Y_t^A} \hat{\varepsilon}_{t+1}^{ges}$$

$$\frac{Y_t^B}{Y_t^{ges}} \hat{\varepsilon}_{t+1}^B = (1-\phi) \hat{\varepsilon}_{t+1}^{ges} \Leftrightarrow \hat{\varepsilon}_{t+1}^B = (1-\phi) \frac{Y_t^{ges}}{Y_t^B} \hat{\varepsilon}_{t+1}^{ges}$$

Ein alternatives Koordinierungsverfahren – das Optimierungskalkül (I)

Schätzfehler
(exemplarisch für *Land A*):

$$\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1^A \\ \hat{\varepsilon}_2^A \\ \dots \\ \hat{\varepsilon}_t^A \\ \hat{\varepsilon}_{t+1}^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^A \\ y_2^A \\ \dots \\ y_t^A \\ \hat{\beta}_0^A + \hat{\beta}_1^A u_{t+1}^A + \phi \frac{Y_t^{ges}}{Y_t^A} \hat{\varepsilon}_{t+1}^{ges} \end{pmatrix} - \hat{\beta}_0^A - \hat{\beta}_1^A \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ \dots \\ u_t^A \\ u_{t+1}^A \end{pmatrix}$$

... in Summenschreibweise
(beide Länder):

$$\sum_{i=1}^{t+1} \hat{\varepsilon}_i^{A2} = \sum_{i=1}^t \underbrace{\left(y_i^A - \hat{\beta}_0^A - \hat{\beta}_1^A u_i^A \right)^2}_{\hat{\varepsilon}_i^A} + \underbrace{\left(\phi \frac{Y_t^{ges}}{Y_t^A} \hat{\varepsilon}_{t+1}^{ges} \right)^2}_{\hat{\varepsilon}_{t+1}^A}$$

$$\sum_{i=1}^{t+1} \hat{\varepsilon}_i^{B2} = \sum_{i=1}^t \underbrace{\left(y_i^B - \hat{\beta}_0^B - \hat{\beta}_1^B u_i^B \right)^2}_{\hat{\varepsilon}_i^B} + \underbrace{\left[(1-\phi) \frac{Y_t^{ges}}{Y_t^B} \hat{\varepsilon}_{t+1}^{ges} \right]^2}_{\hat{\varepsilon}_{t+1}^B}$$

Ein alternatives Koordinierungsverfahren – das Optimierungskalkül (II)

Log-likelihood-Funktionen ...

... Land A:

$$\ln(L^A) = -\frac{t+1}{2} \ln(2\pi\hat{\sigma}^{A2}) - \frac{1}{2\hat{\sigma}^{A2}} \sum_{i=1}^t (y_i^A - \hat{\beta}_0^A - \hat{\beta}_1^A u_i^A)^2 - \frac{1}{2\hat{\sigma}^{A2}} \underbrace{\left(\phi \frac{Y_t^{ges}}{Y_t^A} \hat{\varepsilon}_{t+1}^{ges} \right)^2}_{\hat{\varepsilon}_{t+1}^A}$$

... Land B:

$$\ln(L^B) = -\frac{t+1}{2} \ln(2\pi\hat{\sigma}^{B2}) - \frac{1}{2\hat{\sigma}^{B2}} \sum_{i=1}^t (y_i^B - \hat{\beta}_0^B - \hat{\beta}_1^B u_i^B)^2 - \frac{1}{2\hat{\sigma}^{B2}} \underbrace{\left[(1-\phi) \frac{Y_t^{ges}}{Y_t^B} \hat{\varepsilon}_{t+1}^{ges} \right]^2}_{\hat{\varepsilon}_{t+1}^B}$$

zu optimierende Zielfunktion:

$$\mathcal{Z}(\hat{\beta}_0^A; \hat{\beta}_1^A; \hat{\beta}_0^B; \hat{\beta}_1^B; \phi) = \ln(L^A) + \ln(L^B)$$

Ein alternatives Koordinierungsverfahren – Aufteilung der Anpassungslast als Ergebnis der Optimierung

- aus den FOC $\frac{\partial Z}{\partial \hat{\beta}_{0;1}^{A;B}} = 0$ ergeben sich die $ML=OLS$ -Schätzer für $\hat{\beta}_0^A; \hat{\beta}_1^A; \hat{\beta}_0^B; \hat{\beta}_1^B$
- aus der FOC $\frac{\partial Z}{\partial \hat{\phi}} = 0$ folgt für $\hat{\phi}$ bzw. $(1-\hat{\phi})$:

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{\sigma}^{A^2}}{\hat{\sigma}^{A^2} + \left(\frac{Y_t^B}{Y_t^A}\right)^2 \hat{\sigma}^{B^2}}$$

$$(1-\hat{\phi}) = \frac{\hat{\sigma}^{B^2}}{\left(\frac{Y_t^A}{Y_t^B}\right)^2 \hat{\sigma}^{A^2} + \hat{\sigma}^{B^2}}$$

☞ Aufteilung des Koordinierungsbetrages abhängig von der *relativen* Größe der Regionen und der *relativen* Schätzgenauigkeit!

Ein alternatives Koordinierungsverfahren – die optimale Aufteilung des Koordinierungsbetrages

$$\hat{\varepsilon}_{t+1}^A = \hat{\phi} \cdot \frac{Y_t^{ges}}{Y_t^A} \cdot \hat{\varepsilon}_{t+1}^{ges}$$

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{\sigma}^{A^2}}{\hat{\sigma}^{A^2} + \left(\frac{Y_t^B}{Y_t^A}\right)^2 \hat{\sigma}^{B^2}}$$

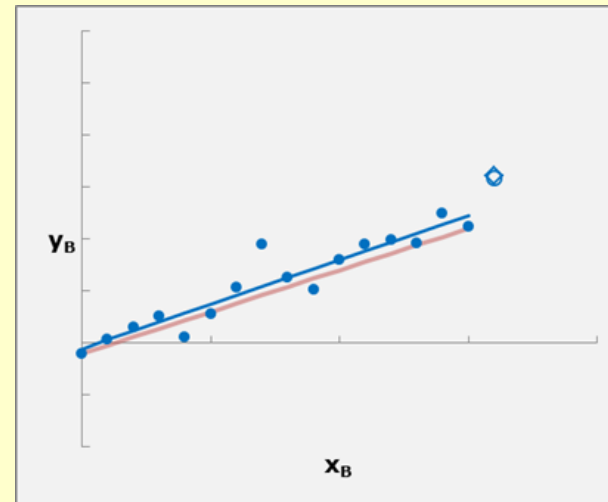
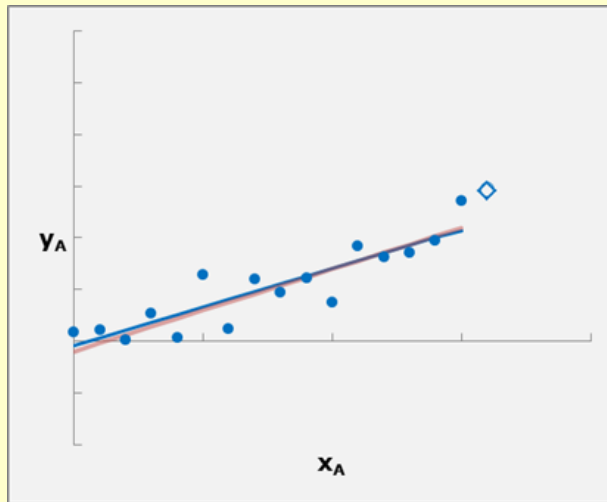
$$\hat{\varepsilon}_{t+1}^B = (1 - \hat{\phi}) \cdot \frac{Y_t^{ges}}{Y_t^B} \cdot \hat{\varepsilon}_{t+1}^{ges}$$

$$(1 - \hat{\phi}) = \frac{\hat{\sigma}^{B^2}}{\left(\frac{Y_t^A}{Y_t^B}\right)^2 \hat{\sigma}^{A^2} + \hat{\sigma}^{B^2}}$$

Ein alternatives Koordinierungsverfahren – Illustration anhand verschiedener Konstellationen (I)

Gleiche Fehlervarianzen, Länder gleich groß: $\hat{\sigma}^{A^2} = \hat{\sigma}^{B^2}$; $Y_t^A = Y_t^B$

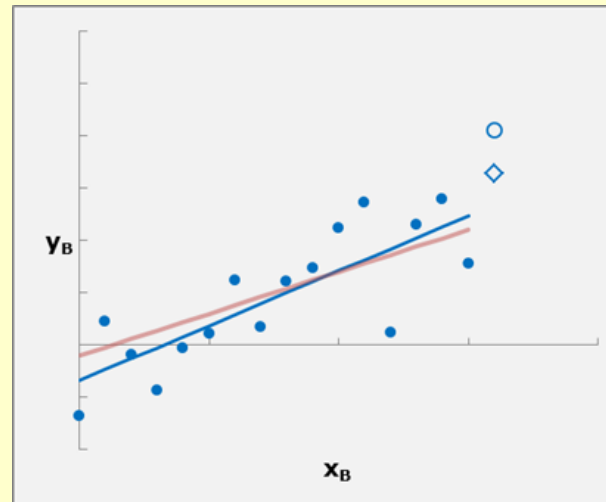
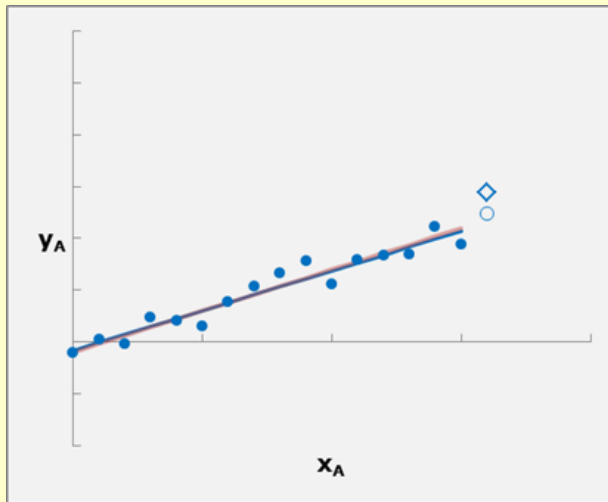
→ Koordinierungsbetrag gleich groß! $\hat{\varepsilon}_{t+1}^A = \hat{\varepsilon}_{t+1}^B = \hat{\varepsilon}_{t+1}^{ges}$ ☞ ... das amtl. Fortschreibungsverfahren!



- ◇ Koordinierung amtl. Methode
- Koordinierung unter Berücksichtigung der Varianz

Ein alternatives Koordinierungsverfahren – Illustration anhand verschiedener Konstellationen (II)

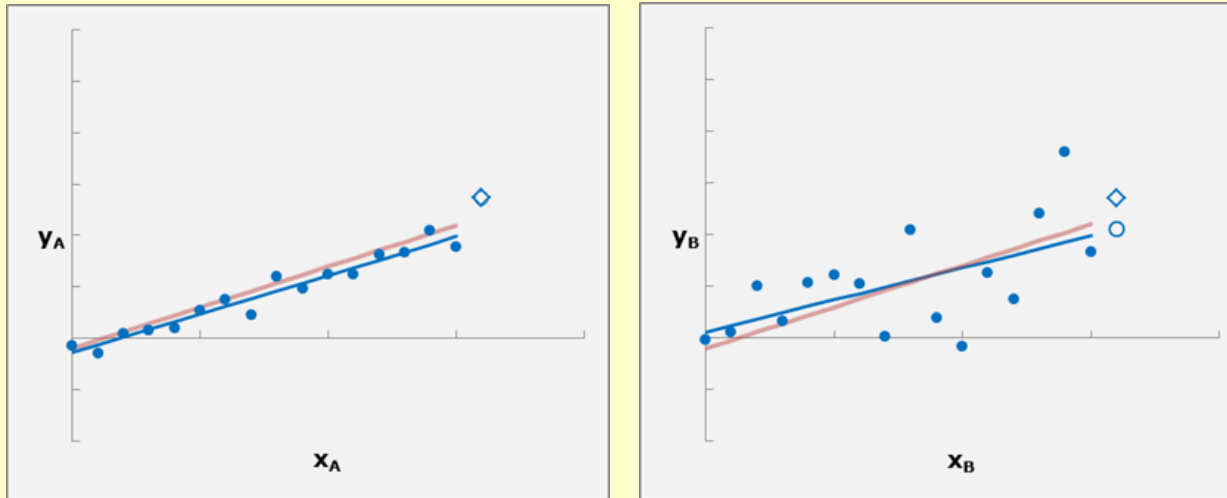
Land A doppelt so groß wie Land B; Fehlervarianz in Land B ungefähr 15 mal höher



- ◇ Koordinierung amtl. Methode
- Koordinierung unter Berücksichtigung der Varianz

Ein alternatives Koordinierungsverfahren – Illustration anhand verschiedener Konstellationen (III)

Land A um 50 mal größer als Land B; Fehlervarianz in Land B etwa 10 mal höher



- ◇ Koordinierung amtl. Methode
- Koordinierung unter Berücksichtigung der Varianz

Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

- Zusammenhang von Fortschreibungsindikator und Zielgröße: quantifizieren statt postulieren!
- Vorteil des alternativen Fortschreibungsverfahrens: Koordinierung modellendogen und empirisch begründet statt *ad hoc*
- Fehler, die nicht begangen werden, müssen auch nicht aufgeteilt werden!
- auch bei *top-down*-Regionalisierung: Schätzung statt Schlüsselung möglich
- methodische Analogie von regionaler und temporaler Disaggregation
- Indikatorgestützte Regionalisierung von Daten: Bedeutung geht über VGR hinaus
- Aufwand und Ertrag?

